

Fyzikální praktikum FJFI ČVUT v Praze
Mechanické kmitání a vlnění, Pohlovo kyvadlo

Číslo úlohy: 10
Jméno: **Vojtěch HORNÝ**
Spolupracoval: Jaroslav Zeman
Datum měření: 26. 10. 2009
Číslo kroužku: pondělí 13:30
Číslo skupiny: 6
Klasifikace:

Zadání

1. Změřte tuhost pružiny statickou metodou a vypočítejte úhlovou frekvenci (včetně celkové chyby určení), se kterou bude soustava kmitat kolem rovnovážné polohy s Vámi zvoleným závažím. Odhadněte, s jakou chybou jste schop(na)en prodloužení pružiny měřit, a vypočítejte minimální hmotnost závaží, které musíte k prodloužení použít, aby jste dosáhl(a) relativní chyby měření tuhosti pružiny 50%. Chybu měření hmotnosti závaží m považujte za nulovou.
2. Změřte úhlovou frekvenci kmitů pružiny dynamickou metodou. Rozhodněte, jestli pro výpočet úhlové frekvence je nutné použít vztah:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad (1)$$

- tj. jestli je útlum tak velký, že překonává chybu měření.

3. Změřte koeficienty tlumení δ pro 2 konfigurace tlumících magnetů. Ověřte přitom platnost vztahu (1).
4. Naměřte závislost amplitudy a fázového posunu kmitů pružiny oproti budící síle na úhlové frekvenci budící síly.
5. Závislost amplitudy A kmitů na úhlové frekvenci budící síly vynesete do grafu, nařítujte tuto závislost funkcí

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 - 4\Omega^2\delta^2}} \quad (2)$$

Z této funkce pak určete vlastní frekvenci ω_0 a útlum δ a určete pomocí vztahu

$$\Omega_{rez} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \quad (3)$$

hodnotu rezonanční frekvence Ω_{rez} . Proč nelze použít měření rezonanční křivky k určení vlastní frekvence kriticky tlumených systémů?

6. Závislost fázového posunu kmitů pružiny θ na úhlové frekvenci budící síly vynesete do grafu, nařítujte tuto závislost funkcí

$$\theta = \arctan\left(\frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{2\delta\Omega}\right) \quad (4)$$

Mějte na paměti, že tento vztah platí pro fázový posun v radiánech. Z nařítované funkce pak opět určete vlastní úhlovou frekvenci a útlum systému.

7. Srovnajte výsledky měření pro vlastní úhlovou frekvenci z úkolů 1,2,5 a 6. Které měření považujete za nejpřesnější a naopak?
8. Změřte tuhost pružiny Pohlova kyvadla.
9. Naměřte časový vývoj výchylky kmitů kyvadla pro netlumené kmity. Za použití výsledků tohoto a minulého úkolu vypočítejte moment setrvačnosti kyvadla I .

10. Změřte koeficient útlumu pro několik zvolených hodnot tlumícího proudu. Závislost vynesete do grafu.
11. Extrapolací určete hodnotu tlumícího proudu, při kterém dochází ke kritickému tlumení. Nastavte tuto hodnotu, změňte průběh při rychlostní a polohové počáteční podmínce a ověřte, že je kyvadlo skutečně kriticky tlumeno.

Základní pojmy a vztahy

Lineární harmonický oscilátor je jedním z nejjednodušších kmitajících systémů. Na oscilátor působí síla přímo úměrná výchylce. Pro jeden směr máme

$$F = -kx \quad (5)$$

Netlumený oscilátor se pohybuje podle pohybové rovnice

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (6)$$

s řešením

$$x(t) = C \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

ω_0 je vlastní frekvence oscilátoru, k je tuhost pružiny a m je hmotnost závaží. Uvažujeme-li i disipativní sílu, obvykle ji bereme úměrnou rychlosti. Pohybová rovnice má pak tvar

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (7)$$

Řešení této rovnice pro slabý útlum je

$$x(t) = Ae^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (8)$$

Působí-li na oscilátor vnější periodická budící síla, zapíšeme pohybovou rovnici jako

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t \quad (9)$$

Řešení očekáváme ve tvaru $x(t) = A \sin(\Omega t + \theta)$, s amplitudou podle vztahu (2) a fázovým posunem podle vztahu (4).

U Pohlova kyvadla vycházíme z pohybové rovnice

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad (10)$$

kde δ představuje koeficient útlumu a ω_0 je vlastní frekvence kyvadla.

Pomůcky

Pružina, sada závaží, měřítko, detektor polohy Leybold VideoCom, rybářská nit, dva rotační senzory zapojené přes USB rozhraní do PC, motůrek s kladkou, zdroj Leybold k napájení motůrku, tlumící magnety připevněné na stojanu, Pohlovo kyvadlo, elektrické tlumení.

Postup měření

1. Zatěžovali jsme pružinu různými zváženými závažími a měřili prodloužení pružiny x . Tuhost pružiny jsme určili podle vztahu $k = \frac{mg}{x}$.
2. Digitálně jsme měřili periodu kmitů a následně podle vztahu $\omega = \frac{2\pi}{T}$ jsme určili frekvenci oscilátoru.
3. Oscilátor jsme umístili mezi dva tlumící magnety a měřili jsme periodu T a úhlovou frekvenci kmitů ω . Koeficient útlumu jsme vypočetli podle mírně upraveného vztahu (1).
4. Pomocí programu VideoCom jsme naměřili závislost amplitudy A a fázového posunu θ oproti budící síle na úhlové frekvenci budící síly Ω .
5. Pomocí programu Gnuplot jsem nafiloval závislost $A(\Omega)$ funkcí (2) a vynesl ji do grafu.
6. Poté jsem nafiloval závislost $\theta(\Omega)$ funkcí (4) a vynesl ji do grafu.

8. Zatěžovali jsme Pohlovo kyvadlo různými zváženými závažími a měřili změnu úhlu φ . Tuhost pružiny jsme určili podle vztahu $D = \frac{mgd}{\varphi}$. d představuje poloměr kyvadla.
9. Pro šest hodnot tlumícího proudu jsme měřili velikost dvou po sobě jdoucích amplitud ϕ_n a ϕ_{n+1} a periodu kmitu kyvadla T . Z toho jsme vypočítali koeficient útlumu podle vztahu $\delta = \frac{\ln \frac{\phi_n}{\phi_{n+1}}}{T}$. Závislost $\delta(I)$ jsme vynesli do grafu.

Experimentální data a výsledky měření

Ve všech výpočtech pokládáme tíhové zrychlení rovno $9,8104 \text{ ms}^{-2}$.

V tabulce č. 1 jsou uvedeny zjištěné hmotnosti závaží a prodloužení pružiny a vypočtené tuhosti pružiny. Vedle nich jsou vlastní frekvence příslušející konkrétním závažím.

Jestliže odhadujeme chybu měření výchylky na 0,5mm, pak tomu, abychom dosáhli relativní chyby měření tuhosti 50%, musíme použít závaží o hmotnosti 1,5 g.

číslo měření	m[g]	x[cm]	k[kgs ⁻²]	ω_0 [s ⁻¹]
1	50	4,1	12,11	10,93
2	10	0,8	11,89	13,92
3	20	1,6	12,11	13,02
4	30	2,4	12,14	12,21
5	80	6,4	12,25	9,66
\bar{k}			12,10	

m – hmotnost závaží
 x – prodloužení pružiny
 k – tuhost pružiny
 ω_0 – vlastní frekvence oscilátoru

$$\mathbf{k} = (12,1 \mp 0,1) \text{ kg} \cdot \text{s}^{-2}$$

Tab. 1 – Měření tuhosti pružiny statickou metodou

Z tabulky č. 2 se dozvíte naměřené hodnoty periody kmitů a vypočítané hodnoty vlastní frekvence oscilátoru při měření vlastní frekvence oscilátoru dynamickou metodou. Rozdíl mezi výpočtem a naměřenou hodnotou je malý, vztah (1) není nutno použít.

číslo měření	T[s]	m[g]	ω_0 [s ⁻¹]	ω [s ⁻¹]
1	0,42	51,4	15,34	15,05±0,16
2	0,57	101,4	10,92	10,97±0,09
3	0,45	61,4	14,04	13,92±0,15
4	0,48	71,4	13,02	12,99±0,14
5	0,52	81,4	12,19	12,14±0,13

T – perioda kmitů
 m – hmotnost závaží a MassBaru
 ω_0 – vypočtená úhlová vlastní frekvence oscilátoru
 ω – naměřená úhlová frekvence oscilátoru

Tab. 2 – Měření vlastní frekvence oscilátoru dynamickou metodou

V tabulkách č. 3 a 4 naleznete data z měření koeficientu útlumu δ . Využili jsme znalost velikosti tuhosti pružiny z prvního úkolu. Měnili jsme hmotnost závaží a pro každou hmotnost jsme vypočítali vlastní úhlovou frekvenci ω_0 ze vztahu (6). Měřili jsme periodu kmitů a podle vztahu $\omega = \frac{2\pi}{T}$ jsme určili úhlovou frekvenci kmitů. Ze vztahu (1) jsme určili koeficient útlumu δ . Tento koeficient jsme měli správně srovnat s koeficientem útlumu vypočítaným podle vztahu (8). Bohužel jsme si zbrkle neuložili velikosti sousedních amplitud, které by nám jej umožnily určit podle vztahu $\delta = \frac{1}{T} \ln \frac{x_0}{x_1}$. Vztah (1) tedy nebyl potvrzen.

číslo měření	m[g]	$\omega_0[s^{-1}]$	T[s]	$\omega[s^{-1}]$	$\delta[s^{-1}]$
1	51,4	15,34	0,42	15,05	2,99
2	61,4	14,04	0,45	13,89	2,07
3	71,4	13,02	0,48	13,02	0,31
4	81,4	12,19	0,51	12,26	1,28
5	101,4	10,92	0,57	11,05	1,64
6	131,4	9,60	0,64	9,78	1,88

Tab. 3 – Měření koeficientu útlumu – slabší konfigurace

číslo měření	m[g]	$\omega_0[s^{-1}]$	T[s]	$\omega[s^{-1}]$	$\delta[s^{-1}]$
1	51,4	15,34	0,41	15,24	1,82
2	61,4	14,04	0,45	13,89	2,05
3	71,4	13,02	0,48	13,02	0,31
4	81,4	12,19	0,52	12,2	0,43
5	101,4	10,92	0,57	11,02	1,47
6	51,4	15,34	0,41	15,24	1,82

Tab. 4 – Měření koeficientu útlumu – silnější konfigurace

V grafech č. 1 a 2 je vidět závislost amplitudy a fázového posunu oproti budící síle na úhlové frekvenci budící síly. Na MassBar jsme přidali závaží o hmotnosti 50g. Závislost $A(\Omega)$ je proložena regresní křivkou $A(\Omega) = \frac{71,57}{\sqrt{(10,958^2 - \Omega^2)^2 + 4 \cdot 1,877^2 \Omega^2}}$. Hodnoty vlastní frekvence, útlumu a poměr amplituda síly/hmotnost závaží byly tedy $\omega_0 = 10,96 \text{ s}^{-1}$, $\delta = 1,88 \text{ s}^{-1}$, $F_0/m = 71,57 \text{ ms}^{-2}$. Rezonanční frekvence budící síly je $\Omega_{rez} = 10,63 \text{ s}^{-1}$.

Závislost $\theta(\Omega)$ jsme nefitovali funkcí doporučenou v návodu (4), která neodpovídá fyzikální realitě, nýbrž funkcí $\theta(\Omega) = \frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{2\delta\Omega}\right)$. Gnuplot vypočítal hodnoty $\omega_0 = 11,07 \text{ s}^{-1}$ a $\delta = 1,88 \text{ s}^{-1}$ stejně jako z předchozí závislosti.

V sedmém úkolu jsme měli srovnat hodnoty vlastní frekvence získané při úkolech 1,2, 5 a 6. Všechny jsou pro společnou hmotnost závaží a MassBaru 101,4g. Všechny hodnoty jsou uvedeny záměrně bez chyb, přesnost bude diskutována.

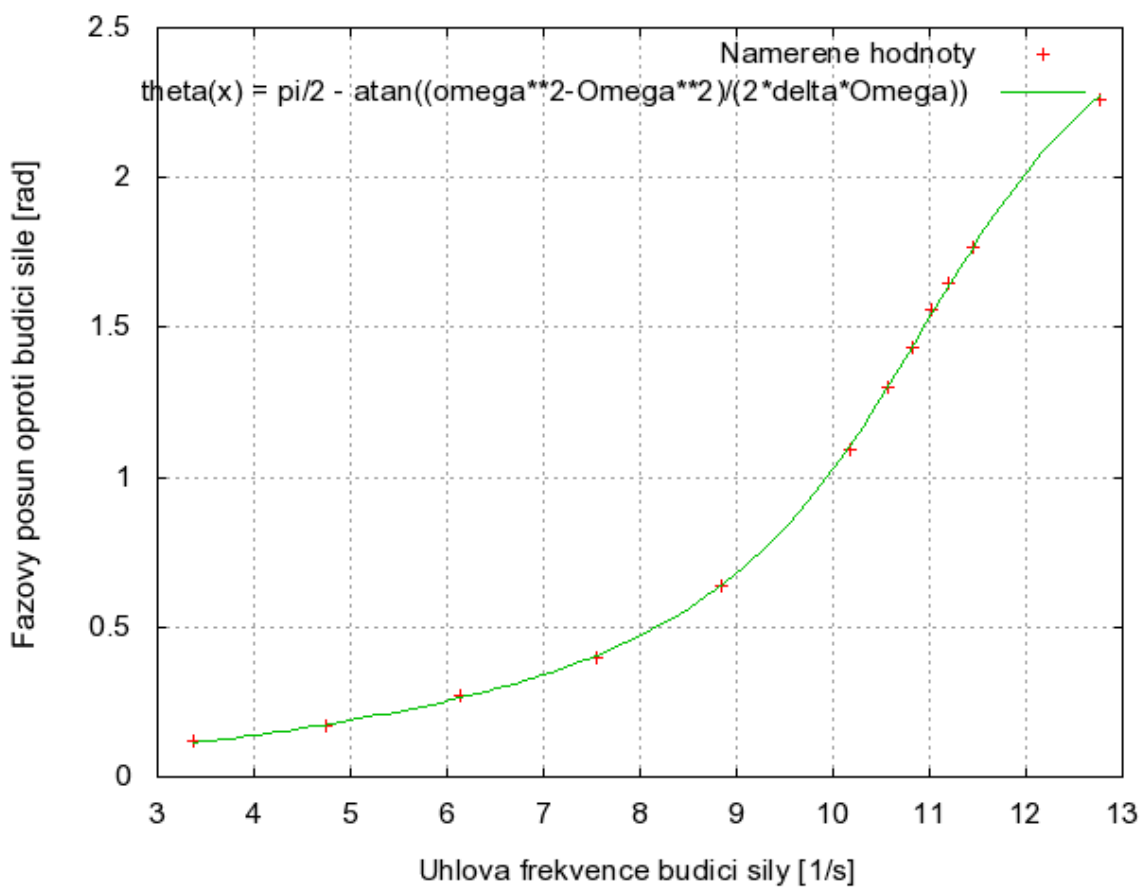
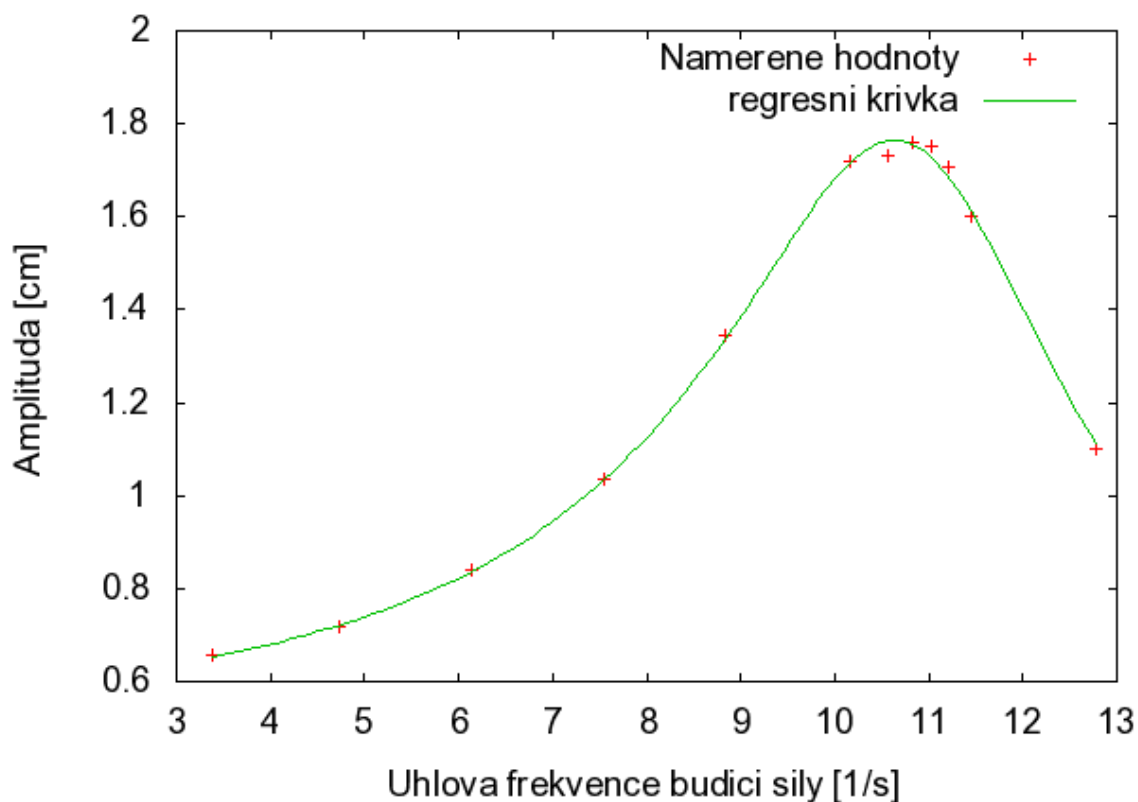
Měření vlastní frekvence oscilátoru	
Měření tuhosti pružiny staticky	$10,93 \text{ s}^{-1}$
Měření vlastní frekvence dynamicky	$10,97 \text{ s}^{-1}$
Fitování podle rezonanční křivky	$10,96 \text{ s}^{-1}$
Fitování podle závislosti $\theta(\Omega)$	$11,07 \text{ s}^{-1}$

Tabulka č. 4 – Srovnání metod pro měření vlastní frekvence oscilátoru

Všechny hodnoty jsou si velmi blízké, liší se až na při zaokrouhlení na tři platné cifry. Přesto bych ale přesnost měření nepřeceňoval. Ve všech měřeních je nejspornější měření výchylky. Nejpresnější je pravděpodobně dynamická metoda měření vlastní frekvence. Nejmeně přesná jsou naopak metody fitování. Celkově tedy stanovuji hodnotu vlastní frekvence oscilátoru při zatížení celkovou hmotností 101,4g na $\omega_0 = (11,0 \pm 0,2) \text{ s}^{-1}$.

m – hmotnost závaží a MassBaru
 ω_0 – vypočtená vlastní frekvence oscilátoru
T – perioda kmitů
 ω – naměřená vlastní frekvence kmitů oscilátoru
 δ – koeficient útlumu podle vztahu (1)

Zavislost amplitudy na uhlove frekvenci budici sily



Grafy 1 a 2 – Závislosti amplitudy a fázového posunu oproti budící síle na úhlové frekvenci budící síly

Tabulka č. 5 obsahuje data z měření tuhosti Pohlova kyvadla statickou metodou. Podařilo se ji změřit velice přesně.

číslo měření	m [g]	d [cm]	φ [st]	D[kg m ² s ⁻²]
1	40	9,39	1,82	0,02022
2	50	9,39	2,34	0,01971
3	10	9,39	0,54	0,01705
4	20	9,39	0,99	0,01856
5	30	9,39	1,45	0,01912
6	80	9,39	2,98	0,02474
7	60	9,39	2,66	0,02075
8	70	9,39	2,85	0,02261
				0,02034

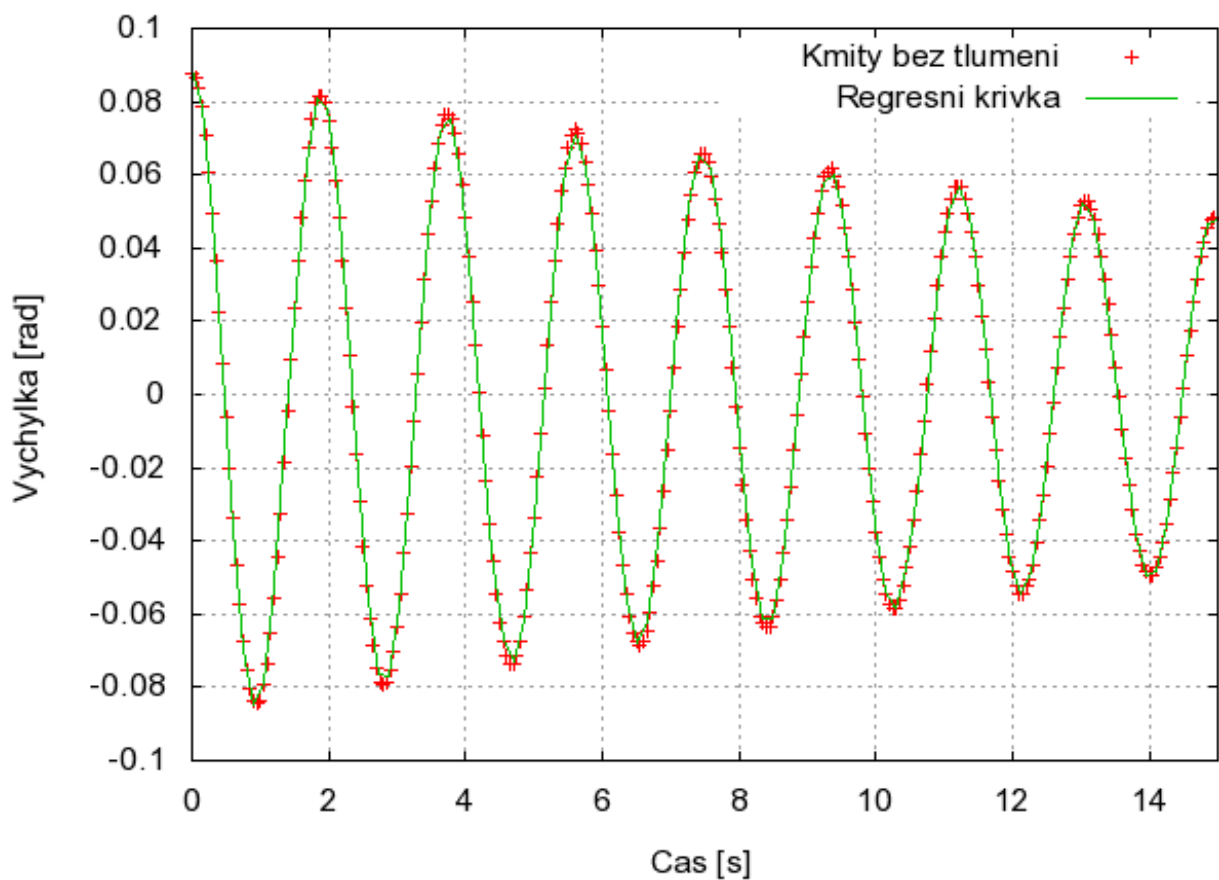
m – hmotnost závaží
d – poloměr Pohlova kyvadla
 φ – výchylka
D – tuhost kyvadla

$$D = (0,0203 \mp 0,0009) \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$$

Tab. 5 – Tuhost Pohlova kyvadla

Změřili jsme také závislost výchylky Pohlova kyvadla na čase. Připevnili jsme 40g závaží na nit a rozkmitali kyvadlo. Chtěli jsme pozorovat netlumené kmity, bohužel se to nezdařilo, pohyb byl mírně tlumený, jak je patrné z grafu 3. V gnuplotu jsem nafitoval hodnoty funkcí $\varphi(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$, vyšly hodnoty $A=0,0887546\text{rad}$, $\omega=3,36672\text{s}^{-1}$, $\delta=0,0401752 \text{ s}^{-1}$ a $\varphi_0=-0,0350235\text{s}^{-1}$.

Pohlovo kyvadlo - vychylka na case



Poté jsme ještě čtyřikrát provedli toto měření a ze znalosti tuhosti z předchozího příkladu jsme podle vzorce $I = \frac{D}{\omega^2}$ určili moment setrvačnosti kyvadla. Výsledky jsou uvedeny v tabulce č. 6.

číslo měření	m[g]	T[s]	ω_0 [s ⁻¹]	I[kgm ²]
1	40	1,86	3,38	0,00178
2	20	1,82	3,46	0,00170
3	30	1,86	3,39	0,00177
4	50	1,74	3,62	0,00155

m – hmotnost závaží
d – poloměr Pohlova kyvadla
 φ – výchylka
I – moment setrvačnosti kyvadla

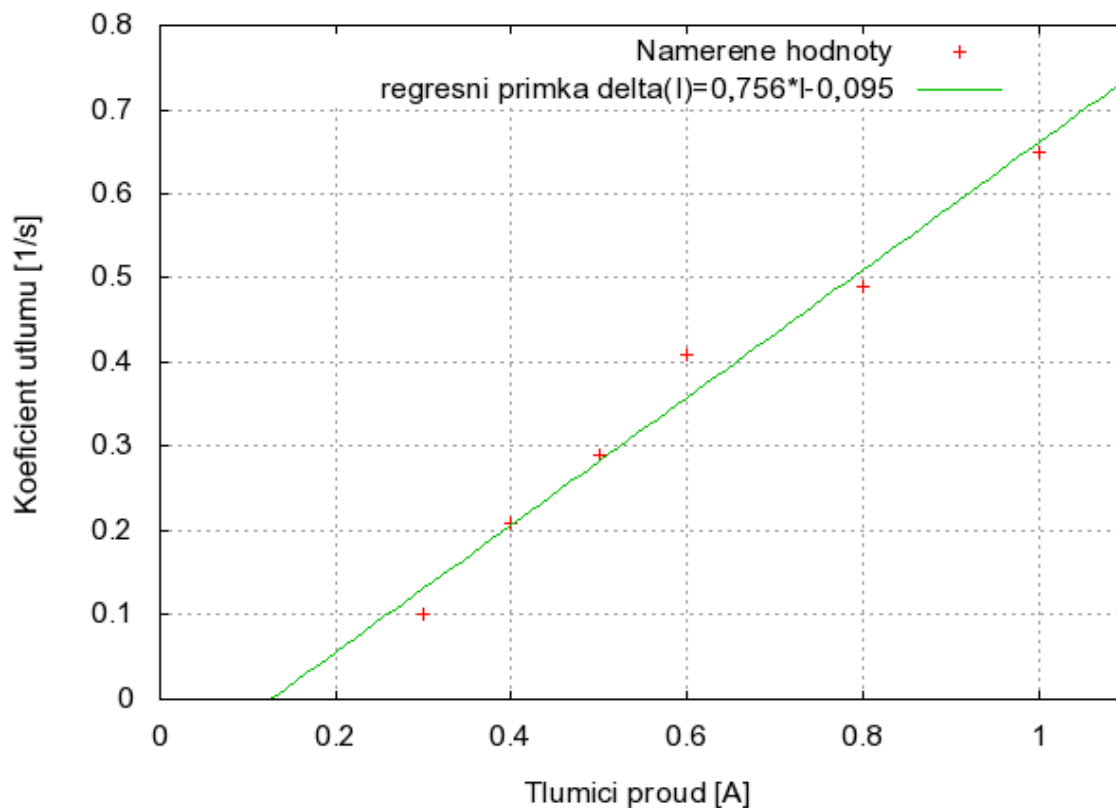
Tab. 6 – Moment setrvačnosti Pohlova kyvadla

Poslední úkol, který jsme naměřili, je závislost koeficientu útlumu na tlumícím proudu. Data z měření jsou v tabulce č. 7 a závislost samotná je zanesena v grafu č. 4. Fitovací funkci jsem zvolil ve formě $\delta(I) = k \cdot I + q$, jelikož systém je mírně tlumený i při nulovém tlumícím proudu.

č.	I[A]	Φ_n [rad]	Φ_{n+1} [rad]	K	T[s]	δ [s ⁻¹]
1	0,5	0,09	0,05	1,06	1,76	0,29
2	0,4	0,13	0,09	1,48	1,87	0,21
3	1,0	0,11	0,03	3,42	1,90	0,65
4	0,3	0,19	0,16	1,20	1,79	0,10
5	0,6	0,14	0,06	2,17	1,88	0,41
6	0,8	0,13	0,05	2,54	1,89	0,49

I – tlumící proud
 Φ_n, Φ_{n+1} – sousední amplitudy
K – poměr Φ_n / Φ_{n+1}
T – perioda
 δ – koeficient útlumu

Tab. 7 – Závislost koeficientu útlumu na tlumícím proudu



Graf. 4 – Závislost koeficientu útlumu na tlumícím proudu

Extrapolací jsme určili hodnotu tlumícího proudu na 4,51A. Dosáhnout takové hodnoty by bylo velmi nebezpečné, v návodu [1] se nedoporučuje ani překračovat hodnotu 1A. Rozhodli jsme se proto poslední úkol neměřit.

Závěr

1. Statickou metodou jsme určili tuhost používané pružiny na $k = (12,1 \mp 0,1)\text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$. Výchylku můžeme díky programu VideoCom měřit velmi přesně, proto je celková chyba určení tak malá. Jestliže odhadujeme chybu měření výchylky na 0,5mm, pak tomu, abychom dosáhli relativní chyby měření tuhosti 50%, musíme použít závaží o hmotnosti 1,5 g.
2. Naměřili jsme úhlové frekvence oscilátoru pro pět různých závaží. Hodnoty jsou přehledně uvedeny v tabulce č. 2. Rozdíl mezi vypočítanou vlastní úhlovou frekvencí a naměřenou úhlovou frekvencí hodnotou je malý, vztah (1) není nutno použít.
3. Vypočítali jsme pro dvě konfigurace tlumících magnetů tlumící koeficienty δ podle vztahu (1). Bohužel jsme zapomněli uložit potřebná data, a tak jsme nevypočítali hodnotu δ podle vztahu (8). Vztah (1) tak nebyl ověřen.
4. Naměřili jsme závislosti amplitudy a fázového posunu oproti budící síle na úhlové frekvenci budící síly.
5. Závislost $A(\Omega)$ podle vztahu (2) je v grafu č. 1. Nafitovaná funkce má tvar
$$A(\Omega) = \frac{71,57}{\sqrt{(10,958^2 - \Omega^2)^2 + 4 \cdot 1,877^2 \Omega^2}}$$
. Hodnoty vlastní frekvence, útlumu a poměr amplituda síly/hmotnost závaží byly tedy $\omega_0 = 10,96 \text{ s}^{-1}$, $\delta = 1,88 \text{ s}^{-1}$, $F_0/m = 71,57 \text{ ms}^{-2}$. Hodnota rezonanční frekvence budící síly je $\Omega_{rez} = (10,6 \pm 0,1) \text{ s}^{-1}$. Při kritickém tlumení systém nerezonuje, proto kritické tlumení nelze použít na výpočet vlastní frekvence oscilátoru.
6. Závislost $\theta(\Omega)$ jsme nefitovali podle vztahu (4), který neodpovídal naměřeným hodnotám. Namísto toho jsme odvodili formuli $\theta(\Omega) = \frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{2\delta\Omega}\right)$. Gnuplot vypočítal hodnoty $\omega_0 = 11,07 \text{ s}^{-1}$ a $\delta = 1,88 \text{ s}^{-1}$.
7. Přehled naměřených vlastních frekvencí pomocí různých metod je v tabulce č. 4. Všechny metody byly poměrně přesné. Nejpřesnější je měření vlastní frekvence dynamicky, nejméně přesné jsou hodnoty získané fitováním dat pomocí gnuplotu.
8. Tuhost Pohlova kyvadla je $D = (0,0203 \mp 0,0009)\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$. Statickou metodou jsme dosáhli velmi přesného výsledku.
9. Změřili jsme závislost výchylky Pohlova kyvadla na čase. Průběh je v grafu 3. Pohyb byl mírně tlumený, nafitovali jsme hodnoty funkcí $\varphi(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$, koeficient útlumu vyšel $\delta = 0,0401752 \text{ s}^{-1}$. Ze znalosti tuhosti jsme určili moment setrvačnosti kyvadla pro čtyři hodnoty, výsledek je v tabulce 6.
10. Lineární závislost $\delta(I) = 0,756I - 0,095$ koeficientu útlumu na tlumícím proudu je tabulce 7 a grafu 4.
11. Extrapolací jsme určili hodnotu tlumícího proudu, kdy by mělo dojít ke kritickému útlumu na 4,51A. Proto jsme kritické tlumení neověřili.

Použitá literatura

[1] <http://praktika.fjfi.cvut.cz/> ...úloha 10